

| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | |
|--|--|--|--|--|

Alumno

1. (2,5 puntos)

En el digrafo ponderado representado en la tabla se quiere encontrar el camino de menor peso que va del nodo F al nodo A. Razona cuál es el algoritmo más adecuado y aplica la primera iteración completa.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|----|---|----|---|----|----|
| A | - | - | - | - | -1 | - |
| B | 1 | - | - | 2 | - | - |
| C | - | 2 | - | - | - | -8 |
| D | -4 | - | - | - | 3 | - |
| E | - | 7 | - | - | - | - |
| F | - | 5 | 10 | - | - | - |

El algoritmo de menor complejidad para calcular el camino más corto de F a A es el de Dijkstra. En este caso no es posible aplicarlo ya que hay pesos negativos. Por tanto, el que aplicaremos es el siguiente en complejidad: el de Bellmann-Ford, que sí admite pesos negativos. En general, el algoritmo de Floyd-Warshall tiene mayor complejidad que el de Bellmann-Ford, y en este digrafo con muy pocas aristas (solo 10 de las 30 posibles), esa diferencia es aún mayor.

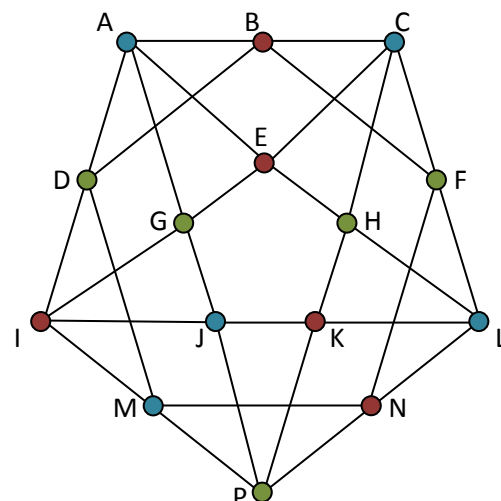
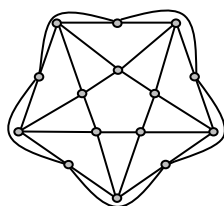
En cada iteración del algoritmo de Bellmann-Ford, se van seleccionando cada una de las aristas y se comprueba si la distancia al vértice extremo de esa arista disminuye utilizándola. Si la respuesta es afirmativa, se actualizan distancia y predecesor de dicho vértice.

| | dF | dA | dB | dC | dD | dE | pF | pA | pB | pC | pD | pE |
|---------|----|----------|----|----|----------|----------|----|----|----|----|----|----|
| | 0 | ∞ | 5 | 10 | ∞ | ∞ | -1 | - | F | F | - | - |
| AE (-1) | 0 | ∞ | 5 | 10 | ∞ | ∞ | -1 | - | F | F | - | - |
| BA (1) | 0 | 6 | 5 | 10 | ∞ | ∞ | -1 | B | F | F | - | - |
| BD (2) | 0 | 6 | 5 | 10 | 7 | ∞ | -1 | B | F | F | D | - |
| CB (2) | 0 | 6 | 5 | 10 | 7 | ∞ | -1 | B | F | F | D | - |
| CF (-8) | 0 | 6 | 5 | 10 | 7 | ∞ | -1 | B | F | F | D | - |
| DA (-4) | 0 | 3 | 5 | 10 | 7 | ∞ | -1 | D | F | F | D | - |
| DE (3) | 0 | 3 | 5 | 10 | 7 | 10 | -1 | D | F | F | D | D |
| EB (7) | 0 | 3 | 5 | 10 | 7 | 10 | -1 | D | F | F | D | D |
| FB (5) | 0 | 3 | 5 | 10 | 7 | 10 | -1 | D | F | F | D | D |
| FC (10) | 0 | 3 | 5 | 10 | 7 | 10 | -1 | D | F | F | D | D |

2. (2,5 puntos)

Sea G el grafo de la figura. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

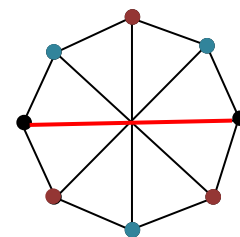
- ¿Es G euleriano?
 - ¿Es G hamiltoniano?
 - ¿Es G planar?
 - ¿Cuál es el número cromático de G?
- G es euleriano, ya que es conexo y todos sus vértices son de grado par.
 - G es hamiltoniano porque tiene un camino hamiltoniano cerrado:
M, N, L, F, C, B, A, D, I, J, G, E, H, K, P, M
 - G es planar:



- El número cromático de G es 3 ya que tiene un 3-ciclo (MNP por ejemplo) por lo que $\chi(G) \geq 3$ y en la figura se puede ver una 3-coloración.

3. (2,5 puntos)

Enuncia el teorema de Kuratowski y define todos los conceptos mencionados en él. Aplica este teorema al estudio de la planaridad del grafo de la figura.



Teorema de Kuratowski: Un grafo G es planar $\Leftrightarrow G$ no contiene subgrafos homeomorfos a K_5 ni a $K_{3,3}$

Un grafo es planar si se puede representar en el plano de tal forma que las aristas no se cortan, salvo en sus extremos

Dos grafos son homeomorfos si se puede obtener uno de otro mediante inserciones y borrados de vértices de grado dos

$H = (V', A')$ es subgrafo del grafo $G = (V, A)$ si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$

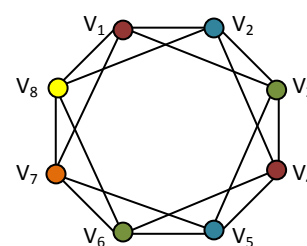
Si se elimina la arista marcada en rojo, el subgrafo resultante es homeomorfo, borrando los dos vértices de grado 2 (en negro), a $K_{3,3}$. Los dos subconjuntos de vértices de $K_{3,3}$ están pintados en diferente color

4. (2,5 puntos)

Aplica el algoritmo de Brelaz para colorear el grafo de la figura.

Da, razonadamente, el número cromático de este grafo.

| | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 | V_5 | V_6 | V_7 | V_8 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Col | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

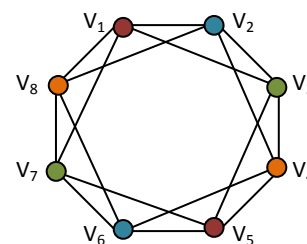


5-coloración obtenida por el algoritmo de Brelaz

| SD | | | | | | | | UD | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| V_1 | V_2 | V_3 | V_4 | V_5 | V_6 | V_7 | V_8 | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 | V_5 | V_6 | V_7 | V_8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 |
| | | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | | | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| | | | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | | | | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 |
| | | | | 2 | 1 | 1 | 2 | | | | | 2 | 3 | 3 | 2 |
| | | | | | 2 | 2 | 2 | | | | | | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | 3 | 3 | | | | | | | 1 | 1 |
| | | | | | | | 4 | | | | | | | | 0 |

El algoritmo DSATUR de Brelaz es un algoritmo aproximado que, en general, no garantiza el número cromático.

En este caso, es el número de independencia $\beta(G)=2$, el que proporciona una acotación útil del número cromático: $n / \beta(G) = 8/2 = 4 \leq \chi(G)$. Como en la figura se puede ver una 4-coloración, tenemos el número cromático $\chi(G) = 4$



4-coloración